MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEȚULUI BACĂU
COLEGIUL NAȚIONAL "FERDINAND I" – BACĂU

Concursul Național de Matematică şi Fizică
"Vrănceanu – Procopiu"
Ediția a XVI –a, 2014

XII

Problema I (10 puncte)

Fie $(M,\cdot)$ un monoid cu $n\geq 2$ elemente, dintre care exact $n-1$ elemente sunt inversabile. Arătați că produsul celor *n* elemente ale monoidului nu depinde de ordinea factorilor.

Marcel Țena

Soluție.

Fie *a* unicul element neinversabil al monoidului, iar $U(M)=M\setminus\{a\}$ mulțimea elementelor inversabile. Observăm că $U(M)$ este stabilă în raport cu operația lui *M*: dacă $x,y\in U(M)$, atunci $(xy)\left(y^{-1}x^{-1}\right)=\left(y^{-1}x^{-1}\right)(xy)=e$ (unde *e* este elementul neutru al monoidului), deci $xy\in U(M)$. **(3p)**

Dacă $x\in U(M)$, arătăm că $xa=a$. Într-adevăr, dacă presupunem contrariul, atunci $xa=y\in U(M)$ şi rezultă că $a=x^{-1}y\in U(M)$, fals. Analog se arată că $ay=a$, oricare ar fi $y\in U(M)$. **(3p)**

Fie *P* produsul tuturor elementelor din *M*, într-o ordine arbitrară. Folosind observația inițială, *P* poate fi scris sub una dintre formele xay sau xa sau ay, cu $x,y\in U(M)$. În oricare dintre situații, rezultă că $P=a$. **(3p)**

Problema a II-a (10 puncte)

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție care admite primitive.

a) Demonstrați că nu există nicio primitivă $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a funcției *f* având proprietatea că $f\circ F=1_{\mathbb{R}}$.

b) Demonstrați că nu există nicio primitivă $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a funcției *f* având proprietatea că $F\circ f=1_{\mathbb{R}}$.

Gheorghe Iurea

Soluție.

Dacă $g\circ h=1_{\mathbb{R}}$, atunci funcția *g* va fi surjectivă, iar *h* va fi injectivă. **(1p)**

O funcție injectivă cu proprietatea lui Darboux este strict monotonă. **(1p)**

a) Presupunem, prin absurd, că ar exista o astfel de primitivă *F*. Atunci *F* va fi injectivă şi continuă, deci va fi strict monotonă. Rezultă că $f=F'$ va avea semn constant, fapt care contrazice surjectivitatea lui *f*. **(2p)**

b) Presupunem, prin absurd, că ar exista o astfel de primitivă *F*. Funcția *f* are proprietatea lui Darboux, ca derivată a funcției *F*. Fiind şi injectivă, *f* va fi strict monotonă. **(1p)**

Funcția *f* nu se poate anula pe $\mathbb{R}$. Într-adevăr, să presupunem că ar exista $a\in\mathbb{R}$ pentru care $f(a)=0$. Cum *f* este strict monotonă, va păstra semne constante şi diferite pe fiecare dintre intervalele $(-\infty,a)$ şi (a,∞). Rezultă că *F* are punct de extrem global în *a*, ccea ce contrazice surjectivitatea lui *F*. **(2p)**

Deoarece *f* are proprietatea valorilor intermediare şi nu se anulează, deducem că *f* are semn constant pe $\mathbb{R}$. Atunci *F* va fi strict monotonă, deci va fi injectivă. Fiind şi surjectivă, *F* este inversabilă, iar ipoteza asumată arată că *f* este inversa sa. Astfel, *f* va fi surjectivă, ceea ce intră în contradicție cu faptul că *f* are semn constant. **(2p)**